ДИС Кирчев 19.11

$f(x)$ (a,b) $[a,b]$

$\exists\ 3 \in (a,b)$ т.ке $f'(3) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Дано $x_1, x_2 \in (a,b)$ и $[x_1,x_2] < (a,b)$
с $x_1 < 3 < x_2$ то

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(3)(x_2 - x_1) \equiv 0$$
$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Нека $f(x)$ е монотонно разстояща $x_1 < x_2$ и $f(x_1) \leq f(x_2)$ - $\exists\ x_0 \in (a,b)$ ~ $h > 0$ т.ке

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

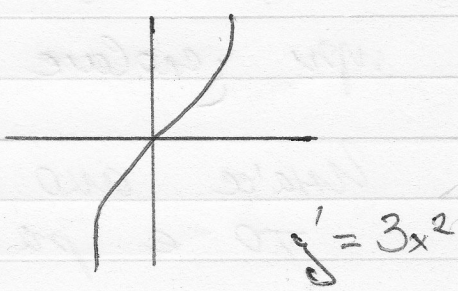
$$f(x_0) + h - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f'(x_0)$$

Сл.

За да бъде диференцируемата функция монотонно разстояща е достатъчно (необходимо) условие производната да е неотрицателна

Контра пример

$y = x^3$



$y' = 3x^2$

$f(x)$ (a,b)

$g(x)$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{0}{0}$$

Т-во правило на Лопитал

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{0}{0} =$$

Нека $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \Rightarrow$ $\sin' x = \cos x$

$x' = 1$ (от $x \to 0$)

следователно $\frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} \to 1$

Док-во

Нека вземем $a < x_0 < b$

разглеждаме $(a\ x_0]$

$f(a) = 0$ и $g(a) = 0$ $\Rightarrow$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ непрекъсната

при условие $g'(x) \neq 0$ и $g(a) \neq g(x_0)$

Иначе ако $g(a) = g(x_0)$ то по правилото на Ро
то е равно на нула

$\exists$ т.3 т.е. $\frac{f'(3)}{g'(3)} = \frac{f(x_0) - f(a)}{g(x_0) - g(a)}$

$\Rightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \longrightarrow l$

устремляем $x_0 \to$ $\Rightarrow 3 \to x$

зажато $a < 3 < x_0$

I - правило на Лопиталя

II правило на Лопиталя

$\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow e$

$g(x) = (1+x)^{1/x} = e^{\ln g(x)} = e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)} \to e^{1} = e$

$\frac{\ln(1-x)}{x} \Rightarrow \frac{0}{0}$

по Лопиталя I $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ по $\frac{0}{0}$

$\left(\begin{matrix} \cos' x - \sin x \\ x^2 - 2x \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{\sin x}{2x} \Rightarrow \frac{\cos x}{2} \to \frac{1}{2}$)

$\lim\limits_{x \to 0} x^x$ $\quad x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$ има вида $0 \cdot \infty$

$\frac{0}{0}$ $\quad \frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$ $\quad \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$

от $\frac{x}{\frac{1}{\ln}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{-1}{(\ln x)^2 / x}} = -x(\ln x)^2 \to \frac{0 \cdot \infty}{\text{НЕ}}$

тогава $\frac{\ln}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x\left(-\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow -x \to 0$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)}$

ако $u(x) = f(x)^{g(x)}$ то $\ln u = g \ln f$

$\Rightarrow \frac{1}{u} u'$ логаритмична производна

$\Rightarrow g' \ln f + g \frac{1}{f} f' \Rightarrow u' = u\left(g' \ln f + g \frac{f'}{f}\right) =$

$= f^g \left(g' \ln f + g \frac{f'}{f}\right)$

$(u(x)v(x))^n \Rightarrow (u(x)v(x))^{I} = u'v + uv'$

$(u(x)v(x))^{II} = u''v + 2u'v' + uv''$

$(uv)^{III} = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{n-1} v' + \dots \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^k + uv^{(n)}$

като бином на Нютон

Неуспех